Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Università degli Studi di Brescia

Elementi di informatica e Programmazione

EXCEL

Il risolutore – parte VI

Docente: Marco Sechi
E-mail: marco.sechi@unibs.it

Vers. 15/10/2015

Il risolutore

Il Risolutore

Microsoft Excel dispone di una funzione, tra i suoi componenti aggiuntivi (**Add-In**), che è chiamata "**Risolutore**" (Solver) che consente di risolvere problemi di ottimizzazione lineare.

Il Risolutore consente di trovare il valore ottimale (ad esempio il massimo o il minimo) per una *formula obiettivo* contenuta in una cella, denominata ***cella obiettivo***. Il risultato della *formula obiettivo* dipende da un gruppo di variabili contenute all'interno di celle denominate ***celle di decisione*** o ***celle variabili***. I valori in queste celle possono essere soggette a limitazioni dette vincoli inserite all'interno delle ***celle vincolo***.

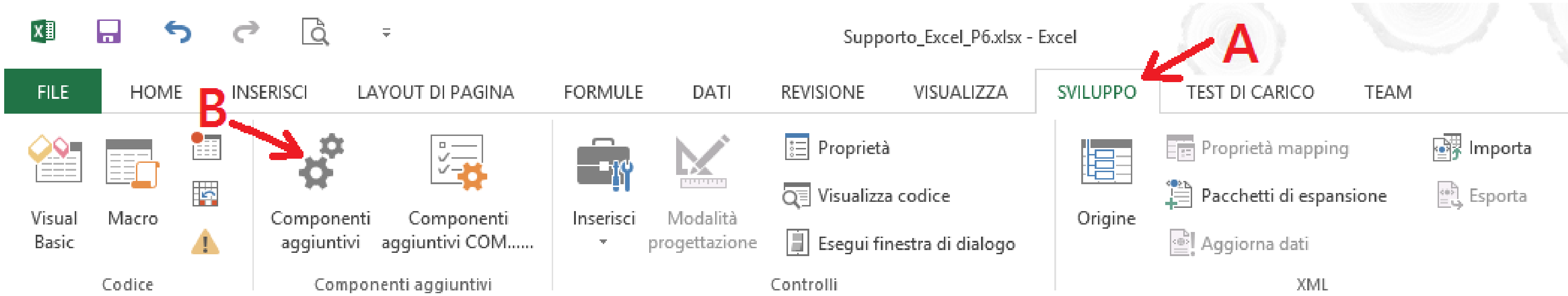
Il Risolutore, rispettando i limiti imposti dalla celle vincolo, modifica i valori all'interno delle celle decisionali e produce dei risultati transitori che gli consentono di valutare la "*bontà*" dei risultati ottenuti per la cella obiettivo.

Ovviamente esso è particolarmente indicato per formule e calcoli complessi ma può essere utilizzato anche per operazioni più semplici come nell'esempio successivo.

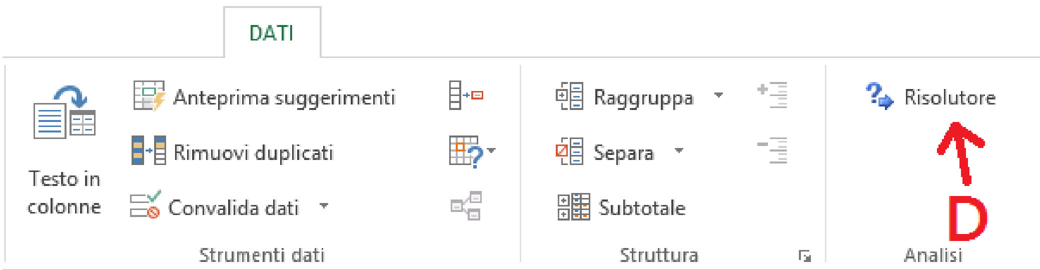
Il Risolutore

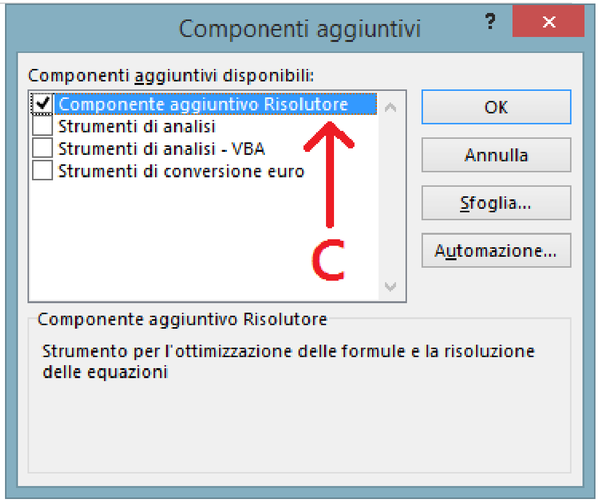
Per attivare il Risolutore occorre seguire i seguenti passaggi:

- Andare nel ribbon "*sviluppo*" (**A**) (se non visibile occorre attivarlo: ribbon "*FILE*" ➔ menu "*Opzioni*" ➔ "*Personalizzazione barra multifunzione*" ➔ checkbox "*Sviluppo*")
- Cliccare sul bottone "*Componenti aggiuntivi*" (**B**)



- Abilito il componente aggiuntivo "Risolutore" (**C**)
- Se tutto è ok nel ribbon DATI deve apparire (**D**)





Il Risolutore

Esempio 1

Per provare il Risolutore creiamo il seguente prospetto:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Descrizione	Q.tà	Prezzo	% sconto	Importo scontato	Iva 22%	Totale
2	Aspiratore Ciclonico	18	€ 92,21	10%	€ 1.493,80	€ 328,64	€ 1.822,44

Inseriamo, a partire dalla cella **E2** le formule necessarie:

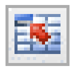
- In **E2** per calcolare l'Importo scontato, utilizziamo la formula **=B2*C2*(1-D2)**, ovvero moltiplichiamo la q.tà (**B2**) per il prezzo (**C2**) ridotto della % di sconto (**1-D2**).
- Nella cella **F2** calcoliamo l'Iva 22% (**E2*0,22** ovvero 22%).
- Nella cella **G2** inseriamo il Totale sommando semplicemente l'Importo scontato (**E2**) e il totale Iva (**F2**).

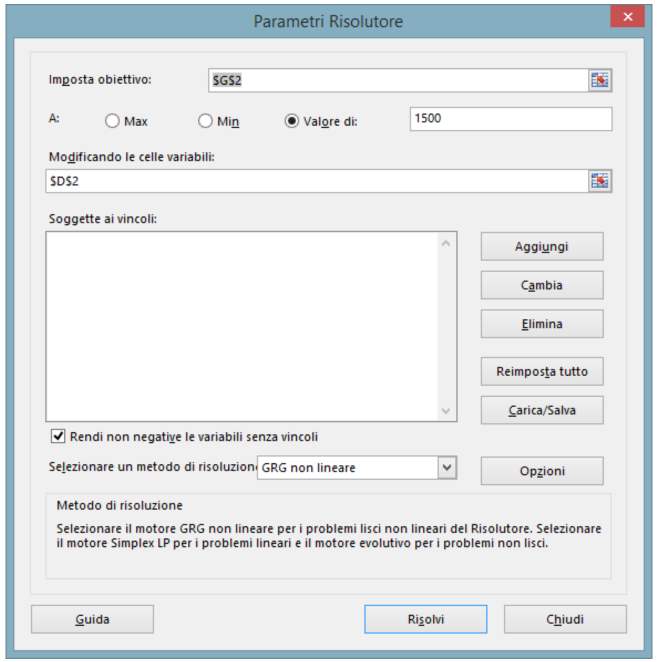
Il Risolutore

Utilizziamo il Risolutore di Excel per risolvere il seguente "problema inverso":

"*Quale % sconto (cella **D2** ➔ **cella Variabile**) dobbiamo applicare per avere un totale (cella **G2** ➔ **cella Obiettivo**) pari a 1.500€ ?*"

Al posto di applicare formule inverse, lasciamo che sia Excel a risolverci tale problema. Selezioniamo quindi la **cella Obiettivo** (**G2**) ed avviamo il Risolutore:

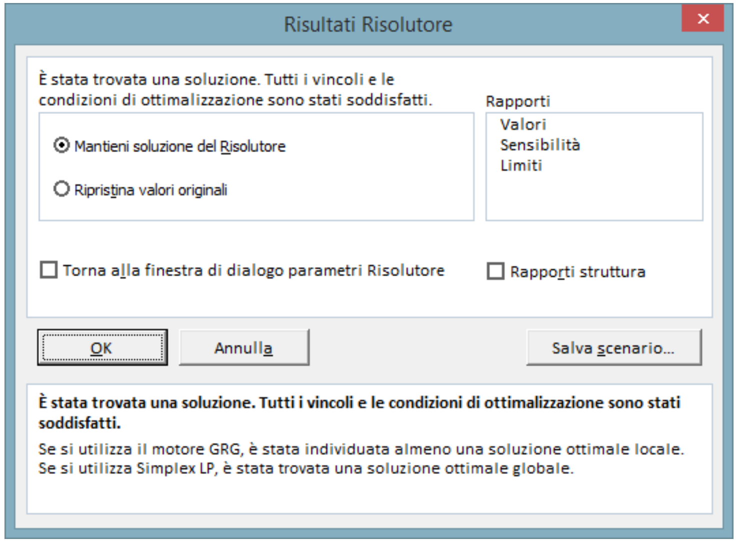
Nella finestra "*Parametri Risolutore*" che si apre, vedremo **$G$2** all'interno della casella "*Imposta obiettivo*". In caso contrario, sarà sufficiente digitare **$G$2 (*totale*)** oppure selezionare la cella dal foglio di calcolo attraverso il "*pulsante di collegamento con il foglio di calcolo*" . Impostiamo la voce "*modificando le celle variabili*" inserendo **$D$2** (*% sconto*) e indichiamo come obiettivo "*valore di*" pari a 1500. Terminiamo con un clic sul pulsante "*Risolvi*" posto in basso nella finestra.



Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

Terminata l'esecuzione del solver viene visualizzata la finestra "*Risultati risolutore*" che indica se è stata trovata o meno una soluzione al problema.
Nel nostro esempio la soluzione è rappresentata dalla percentuale di sconto pari al 25,92% che porta ad ottenere un totale fattura di 1.500€. A questo punto, possiamo scegliere se vogliamo "*mantenere*" la soluzione proposta dal Risolutore.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Descrizione	Q.tà	Prezzo	% sconto	Importo scontato	Iva 22%	Totale
2	Aspiratore Ciclonico	18	€ 92,21	25,92%	€ 1.229,51	€ 270,49	€ **1.500,00**

Cella Obiettivo

Cella variabile

Chiaramente, senza ricorrere al risolutore, potevo utilizzare la formula inversa sapendo che:

$$(Q.tà \cdot Prezzo) \cdot (1 + \%Iva) \cdot (1 - \%Sconto) = Totale\ richiesto$$

ma questo non sempre questo è possibile!

Il Risolutore

Esempio 2

Supponiamo di dover risolvere il seguente problema: una compagnia gestisce 3 miniere. Dalle 3 miniere è possibile estrarre **ferro**, **carbone** e **rame**. La quantità di produzione giornaliera $Q_{m,t}$ di ogni miniera **m** per tipologia di prodotto **t** (in tonnellate), il costo di esercizio giornaliero C_m ed i costi fissi di attivazione di ogni miniera F_m sono indicati nei seguenti prospetti:

$Q_{t,m}$ = Produzione Giornaliera:

$Q_{t,m}$ m \ t	t=1 Ferro	t=2 Carbone	t=3 Rame
Miniera 1	5	5	
Miniera 2	4	6	5
Miniera 3	2	7	

C_m = Costi Giornaliero di Esercizio

	C_m	effettivo G_m*C_m
Miniera 1	19	0,00
Miniera 2	23	0,00
Miniera 3	20	0,00
Totale Costi Esercizio		0

F_m = Costi Fissi di Attivazione

	F_m	Y_m = Attivato Se(G_m>0;F_m;0)
Miniera 1	15	0
Miniera 2	16	0
Miniera 3	12	0
Totale Costi Fissi		0

La Compagnia si è impegnata a consegnare entro una settimana:
54 tonnellate di Ferro, 65 tonnellate di Carbone e 15 tonnellate di Rame.
Si determini <u>quali miniere attivare</u> ed il <u>numero di giorni di attività</u> per miniera (*si tenga presente che l'arco temporale è limitato ad una settimana*!) necessari a rispettare l'impegno assunto e che comporti un costo totale minimo.
N.B.: il costo di attivazione F_m è pagato solo se la miniera **m** viene utilizzata, indipendentemente dal numero di giorni lavorativi.

Il Risolutore

Un semplice approccio risolutivo al nostro problema delle miniere è quello che prevede l'enumerazione totale.

Con tale tecnica la soluzione ottima viene ottenuta enumerando tutte le possibili combinazioni di valori che le variabili decisionali possono assumere. Le combinazioni delle variabili decisionali non ammissibili vengono scartate (quelle che non rispettano i vincoli per intenderci!) mentre le altre vengono analizzate al fine di determinare quella a cui corrisponde il valore ottimo della funzione obiettivo.

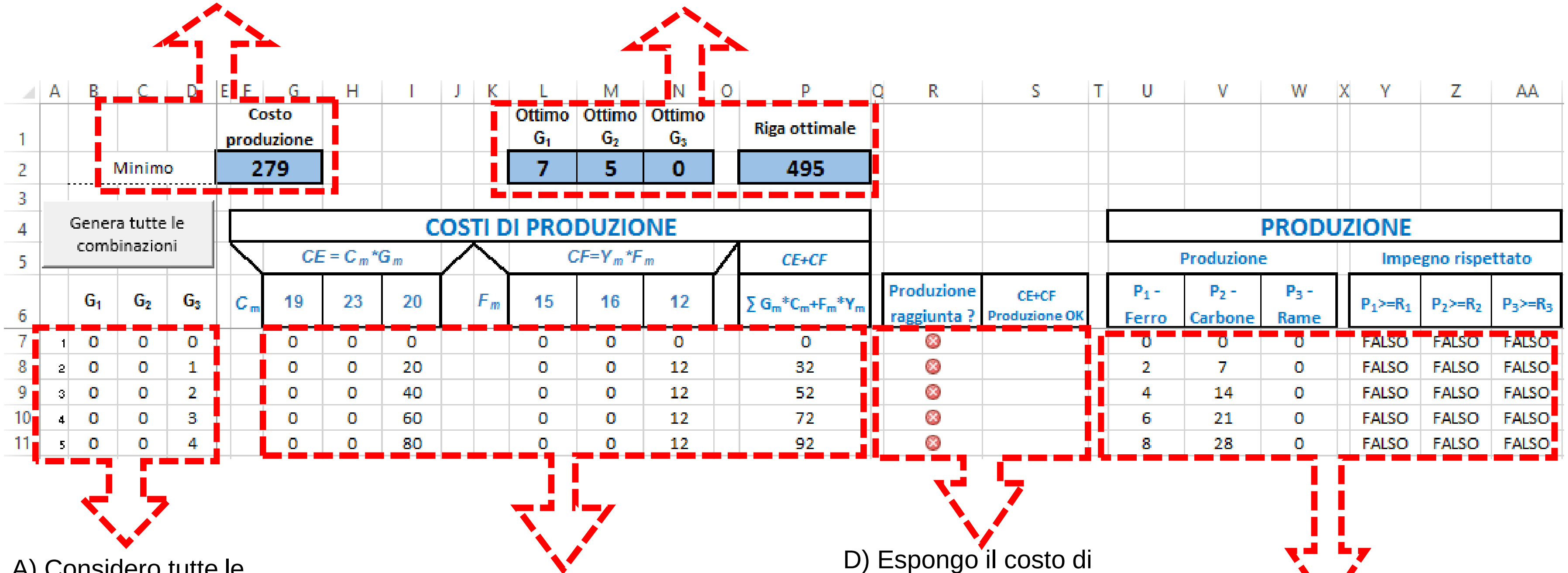
Questa tecnica di risoluzione di un problema di programmazione lineare intera è teoricamente applicabile in tutte le situazioni dove il numero di combinazioni possibili per le variabili decisionali è finito. Purtroppo però, ciò è possibile solo per problemi di dimensioni molto ridotte in quanto i tempi di calcolo crescono con rapidità esponenziale al crescere della dimensione del problema.

In conclusione, possiamo affermare che l'enumerazione totale non rappresenta una tecnica praticabile se non in rari casi caratterizzati da un numero molto basso di variabili.

Il Risolutore

E) Calcolo il valore minimo del costo di produzione

F) Cerco la riga contenente il minimo costo ed estraggo la combinazione G_1, G_2 e G_3 corrispondente



A) Considero tutte le possibili disposizioni con ripetizione di giorni da 0 a 7 per le 3 miniere per cui 8^3 =512 possibili combinazioni

B) Calcolo il costo di produzione corrispondente alla singola combinazione di valori delle variabili decisionali

D) Espongo il costo di esercizio solo per le combinazioni ammissibili. Per le altre mostro la stringa nulla

C) Valuto le combinazioni che risultano ammissibili (che soddisfano l'impegno assunto)

Tutte le possibili disposizioni con ripetizione possono essere ottenute mediante le seguenti formule. Creo una colonna con un numero progressivo **N** da 0 a 511. Utilizzando le seguenti formule, applicate ad **N**, genero tutte le 8^3 combinazioni di giorni $\mathbf{G_1}$,$\mathbf{G_2}$ e $\mathbf{G_3}$.

G_3 =RESTO(N;8) G_2 =RESTO((N-G_3)/8;8) G_1 =RESTO((N-G_2*8-G_3)/8^2;8)

Il Risolutore

In alternativa possiamo ricorrere al risolutore di Excel:

A - DEFINIZIONE DEGLI ELEMENTI PRINCIPALI DEL PROBLEMA:

Prima di iniziare a lavorare con Excel bisogna strutturare il problema identificando:

- **Indici e costanti**
- **Variabili**
- **Funzione obiettivo**
- **Vincoli**

Gli **indici e le costanti** del problema sono:

t	Indica il tipo produzione (1- Ferro, 2 - Carbone, 3 - Rame)
m	Indica la miniera (1,2 e 3)
R_t	Quantità di prodotto **t** da consegnare
C_m	Costo di esercizio giornaliero della miniera **m**
F_m	Costo fisso di attivazione della miniera **m**
$Q_{t,m}$	Quantità giornaliera di prodotto **t** estraibile dalla miniera **m**
Y_m	Vale 1 se la miniera **m** è stata attivata, 0 altrimenti.

Il Risolutore

Le **<u>variabili decisionali</u>** sono quelle che rappresentano le decisioni che l'imprenditore può prendere per raggiungere il proprio obiettivo. In questo caso le variabili sono:

G_m numero di giorni di attività per la miniera **m**. Una miniera con 0 giorni di attività è una miniera non attivata (quindi Y_m=0).

La **<u>funzione obiettivo</u>** rappresenta la funzione che descrive cosa l'imprenditore vuole ottenere. In questo caso la funzione obiettivo è rappresentata dalla <u>minimizzazione dei costi di produzione</u> che dipendono, per ogni miniera **m**, dai costi di esercizio giornalieri C_m e da quelli fissi F_m relativi all'attivazione della miniera (quest'ultimi solo se la miniera è stata utilizzata!)

C_m:Costo di esercizio giornaliero della miniera **m**

Y_m: vale 1 se la miniera **m** è stata attivata, 0 altrimenti.

$$Min \sum_{m=1}^{3} (C_m \cdot G_m + Y_m \cdot F_m)$$

G_m :numero di giorni di attività per la miniera **m.**

F_m:Costo fisso di attivazione della miniera **m**

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

Le variabili decisionali sono soggette a **vincoli** che rappresentano delle limitazioni alle decisioni che il nostro imprenditore può prendere. In questo esempio i vincoli sono 2:

- Il primo è sul numero massimo di giorni G_m di attività che deve essere minore o uguale a 7 (*l'obbligo assunto è quello di consegnare entro una settimana!*)

$$0 <= G_m <= 7$$

- Il secondo è relativo alla quantità di materia prima **t** da estrarre che deve essere sufficiente a superare la quantità R_t che l'azienda si è impegnata a consegnare entro la fine della settimana.

$$\sum_{m=1}^{3} G_m \cdot Q_{t,m} \geq R_t$$

G_m :numero di giorni di attività per la miniera **m**.

R_t: quantità richiesta dal cliente di prodotto **t** estratta dalla miniera **m**

$Q_{t,m}$: quantità giornaliera di prodotto **t** estratta dalla miniera **m**

Il Risolutore

B - PREPARAZIONE DEL FOGLIO EXCEL:

Dopo aver individuato le variabili decisionali, la funzione obiettivo e i vincoli, siamo ora pronti a costruire il foglio di Excel per risolvere il problema. Organizziamo le 3 parti come segue

Variabili Decisionali: evidenziate con lo sfondo giallo sono nel nostro esempio rappresentate dai giorni di attività G_m per ogni miniera.

G_m = Giornate di attività		
Miniera 1	0	G_1
Miniera 2	0	G_2
Miniera 3	0	G_3

Vincoli: evidenziati con sfondo verde si riferiscono a limitazioni sui valori assunti dalle variabili decisionali G_m o da formule che dipendono da queste variabili.

Nel nostro caso devo avere che:

- G_m sia compreso tra 0 e 7
- la quantità di materia **t** (che è in funzione di G_m) estratta nella settimana sia tale da rispettare gli impegni assunti (quindi ≥ R_t ∀ materia **t**).

VINCOLI

Prod. Richiesta $\Sigma G_m Q_{t,m} >= R_t$		
Ferro	0	54
Carbone	0	65
Rame	0	15

Giorni Attività G_m <=7		
Miniera 1	0	7
Miniera 2	0	7
Miniera 3	0	7

Il Risolutore

Funzione obiettivo: rappresenta ciò che voglio minimizzare ovvero i <u>costi di produzione</u> necessari per far fronte alle richieste dei clienti:

C_m = Costi Giornaliero di Esercizio

	C_m	effettivo $=G_m*C_m$
Miniera 1	19	0,00
Miniera 2	23	0,00
Miniera 3	20	0,00
CE = Totale Costi Esercizio		0

F_m = Costi Fissi di Attivazione

	F_m	$=Y_m*F_m$ $=SE(G_m>0;F_m;0)$
Miniera 1	15	0
Miniera 2	16	0
Miniera 3	12	0
CF = Totale Costi Fissi		0

Dobbiamo quindi sommare i costi di esercizio giornalieri (**CE**) con i costi fissi di attivazione (**CF**) di ogni miniera. Pertanto la funzione obiettivo è la somma tra CE e CF.

Obiettivo: minimo Costo della produzione (CE+CF)	0

Il Risolutore

Il foglio di lavoro associato al nostro esempio potrebbe essere simile a questo mostrato nella figura qui a fianco.

	A B	C	D	E	F
4	**G_m = Giornate di attività**				
7		Miniera 1	0	G_1	
8		Miniera 2	0	G_2	
9		Miniera 3	0	G_3	

$Q_{t,m}$ = Produzione Giornaliera:

$Q_{t,m}$ t / m	t=1 Ferro	t=2 Carbone	t=3 Rame
Miniera 1	5	5	
Miniera 2	4	6	5
Miniera 3	2	7	

C_m = Costi Giornaliero di Esercizio

	C_m	effettivo $=G_m*C_m$
Miniera 1	19	0,00
Miniera 2	23	0,00
Miniera 3	20	0,00

CE = Totale Costi Esercizio 0

F_m = Costi Fissi di Attivazione

	F_m	$=Y_m*F_m$ $=SE(G_m>0;F_m;0)$
Miniera 1	15	0
Miniera 2	16	0
Miniera 3	12	0

CF = Totale Costi Fissi 0

VINCOLI

Prod. Richiesta $\Sigma G_m Q_{t,m} >= R_t$)

Ferro	0	54
Carbone	0	65
Rame	0	15

Giorni Attività $G_m <=7$

Miniera 1	0	7
Miniera 2	0	7
Miniera 3	0	7

Obiettivo: minimo Costo della produzione (CE+CF) **0**

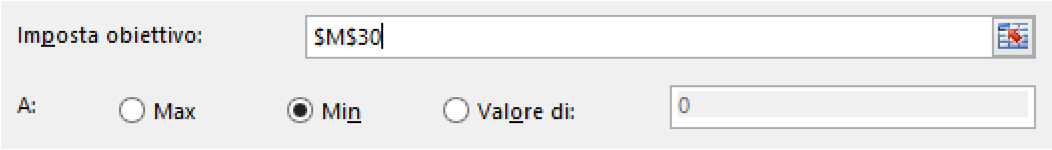
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

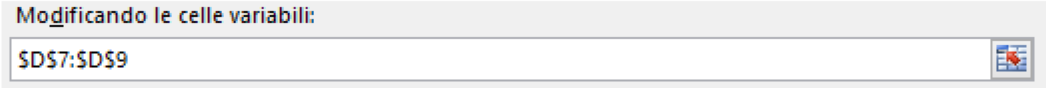
C - PREDISPOSIZIONE DEL RISOLUTORE:

Adesso siamo pronti ad impostare il solver tramite il bottone: 

In "**Imposta obiettivo**" inseriamo la cella della funzione obiettivo (costo complessivo della produzione), nel nostro caso **$M$30**. Poiché ci interessa minimizzare tale quantità selezioniamo il radio button **Min**.



In "**modificando le celle variabili**" indichiamo le variabili decisionali, in questo caso **$D$7:$D$9.**



Nel caso le celle decisionali siano disgiunte possiamo scriverle una dopo l'altra inserendo un ; come separatore.

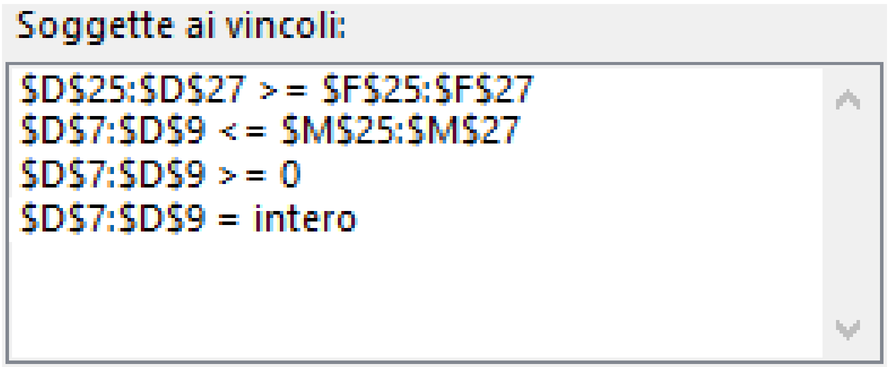
Il Risolutore

In "**Soggette ai vincoli**" bisogna inserire i vincoli:

- **$D$25:$D$27 >= $F$25:$F$27 ➔** produzione adeguata alla richiesta $\mathbf{R_t}$;

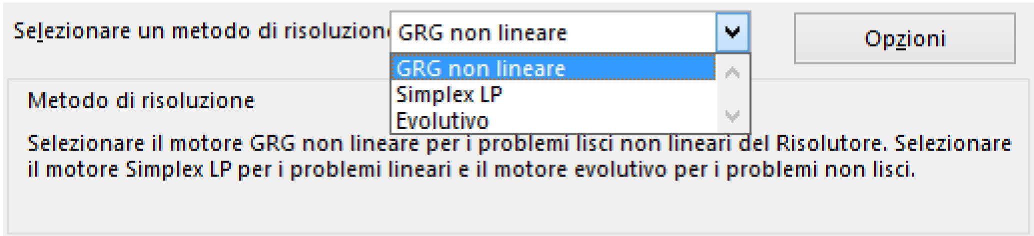
- **$D$7:$D$9 <= $H$21:$H$23 ➔** numero giorni lavorativi ≤ 7. Potevamo anche scrivere: **$D$7:$D$9 <= 7**
- **$D$7:$D$9>=0 ➔** numero giorni lavorativi ≥ 0
- **$D$7:$D$9= intero ➔** non è uno dei vincoli citati in precedenza ma mi consente di diminuire il numero di combinazioni che il solver deve analizzare. Quindi decido che non sono ammesse durate giornaliere $\mathbf{G_m}$ parziali o con decimali.

Nel caso un gruppo di vincoli presenti sempre lo stesso tipo di disuguaglianza è possibile raggrupparli utilizzando le aree (vedi primo e secondo vincolo nella figura a fianco)



Il Risolutore

In "**Selezionare un metodo di risoluzione**" possiamo scegliere il metodo risolutivo adottato dal Solver:



Sono disponibili tre tipi di algoritmi di soluzione:

- **Simplex LP** che implementa l'algoritmo del simplesso per la programmazione lineare (PL) e quello del "branch and bound" nel caso delle variabili intere o binarie (PLI).

Un problema di programmazione lineare consiste nel massimizzare o minimizzare (ottimizzare) una *funzione lineare* definita su una *regione ammissibile* associata all'insieme dei punti che soddisfano un sistema di *disequazioni lineari*, dette **vincoli**.
Nel caso della programmazione lineare (PL) la regione ammissibile è un poliedro che può essere vuoto, limitato o illimitato. L'**algoritmo del simplesso** è in grado di determinare (nel caso il problema abbia una soluzione ottimale finita) la soluzione ottima, che sotto opportune ipotesi, è uno dei vertice del poliedro.
I problemi di programmazione lineare intera (PLI) sono quelli dove le variabili decisionali possono assumere solo valori interi, contenuti all'interno del loro dominio di esistenza.

Il Risolutore

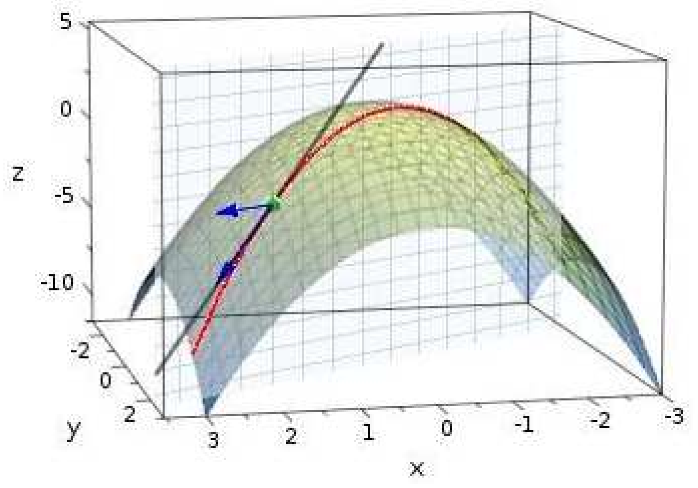
Per questa classe di problemi esiste un algoritmo di risoluzione molto importante, chiamato **Branch and bound**. Questo algoritmo deve la sua importanza al fatto che è un metodo di risoluzione esatto. Questo significa che permette di trovare la miglior soluzione ammissibile, qualora questa esista, che risolve il problema studiato.
Contrariamente alla "enumerazione totale" il "**Branch and Bound**" effettua un'esplorazione parziale sull'insieme delle soluzioni ammissibili. La funzione obiettivo viene calcolata solo su un sottoinsieme di cardinalità abbastanza piccola delle soluzioni ammissibili che possiede la proprietà di contenere almeno una soluzione ottima.

- **GRG non lineare** che è un metodo basato sull'algoritmo del gradiente ed è adatto a problemi non lineari in cui le funzioni siano sufficientemente regolari.

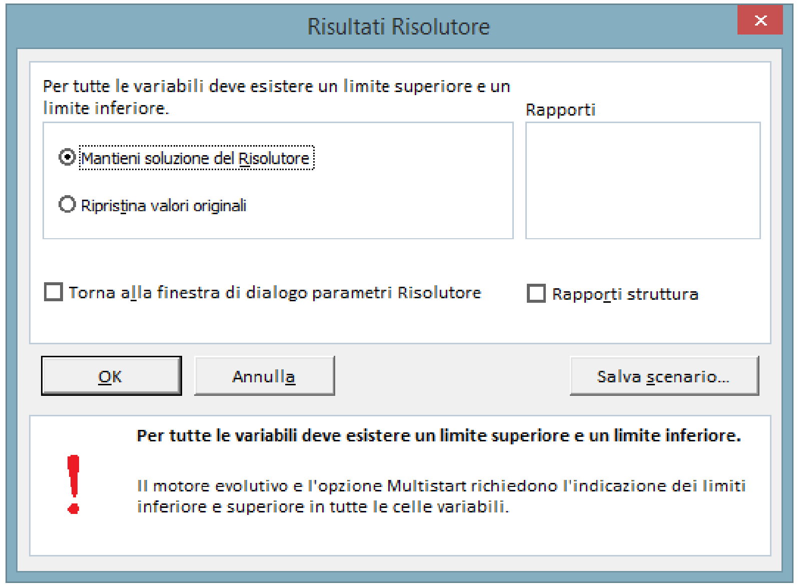
Un problema di programmazione non lineare consiste nel massimizzare o minimizzare (ottimizzare) una *funzione non lineare (obiettivo)* definita su una *regione ammissibile* che rappresenta l'insieme dei punti che soddisfano un sistema di *disequazioni (lineari e non)* dette **vincoli**.
Il **metodo del gradiente** è una tecnica di ottimizzazione di tipo locale. Data una funzione matematica multidimensionale, la discesa del gradiente (*Il gradiente di una funzione è definito come il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione originale*) permette di seguire la discesa indicata dal gradiente con l'obiettivo di trovare un minimo locale.

Il Risolutore

La tecnica consiste nel valutare, inizialmente in un punto scelto a caso nello spazio multidimensionale (1° punto), sia la funzione stessa sia il suo gradiente. Il gradiente, essendo una direzione di discesa indica la direzione in cui la funzione tende a un minimo. Si sceglie poi un altro punto (2° punto) nella direzione indicata dal gradiente. Se la funzione al secondo punto ha un valore inferiore al valore calcolato al primo punto, la discesa può continuare, seguendo adesso però il gradiente calcolato al secondo punto, che potrebbe essere molto diverso dal gradiente calcolato al primo punto.



- **Evolutivo** cioè basato sugli algoritmi di tipo genetico, è adatto a problemi anche difficili, ma richiede di definire a priori il campo di valori delle variabili di decisione all’interno dei quali effettuare la ricerca.



Il Risolutore

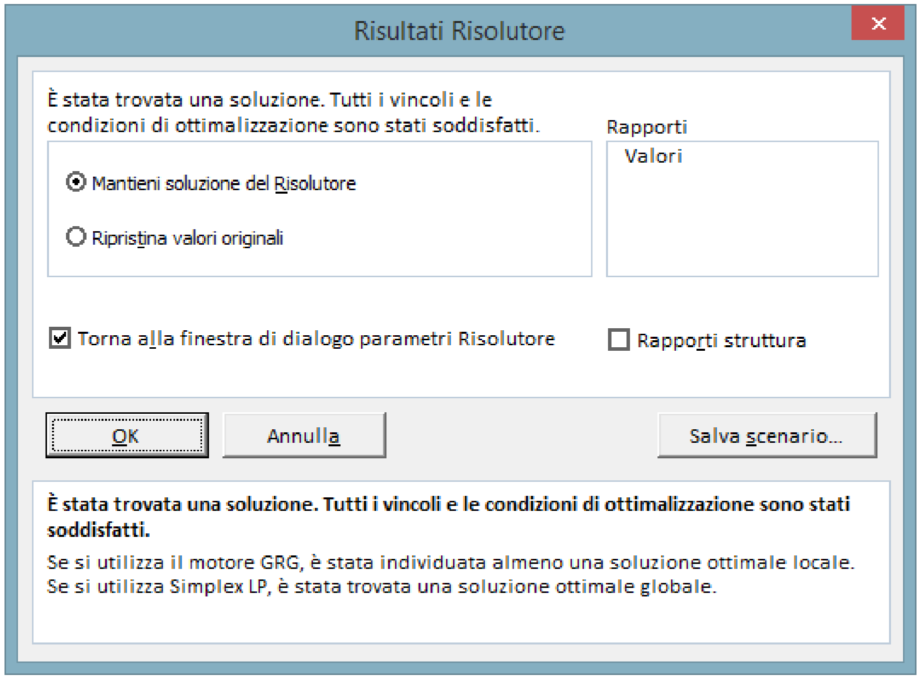
Proviamo ad utilizzare come primo algoritmo di soluzione il "**GRG non lineare**". Ottengo come soluzione:

G_m = Giornate di attività

Miniera 1	7	G_1
Miniera 2	3	G_2
Miniera 3	2	G_3

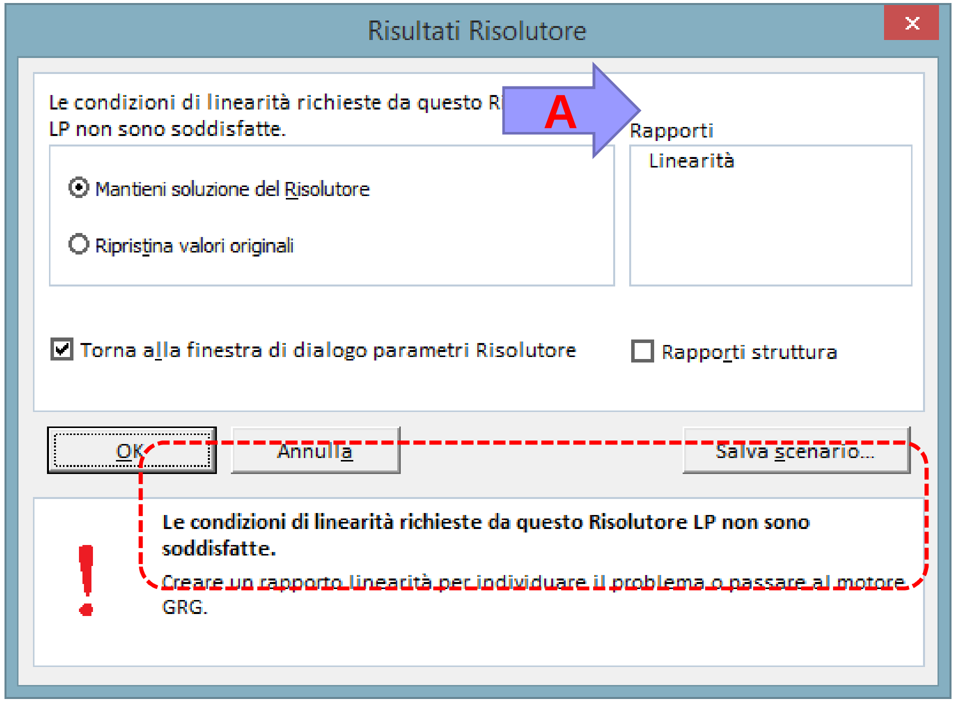
Obiettivo: minimo Costo della produzione (CE+CF) **285,00**

La soluzione trovata non è ottimale (è stato trovato un <u>minimo locale</u>!) come possiamo dedurre confrontando il risultato ottenuto con quello fornito dall'enumerazione totale.



Il Risolutore

Ripetiamo l'operazione di risoluzione impostando adesso il metodo risolutivo "**Simplex LP**". Otteniamo il seguente avvertimento:



La condizione di non linearità che non viene soddisfatta può essere evidenziata selezionando la creazione del "*rapporto di linearità*" (**A**)

6 Cella obiettivo (Min)

	Cella	Nome	Valore originale	Valore finale	Funzione lineare
7	**Cella**	**Nome**	**Valore originale**	**Valore finale**	**Funzione lineare**
8	$M$30	Obiettivo: minimo Costo della produzione (CE+CF) =Ym*Fm =SE(Gm>0;Fm;0)	285,00	285,00	**No**

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

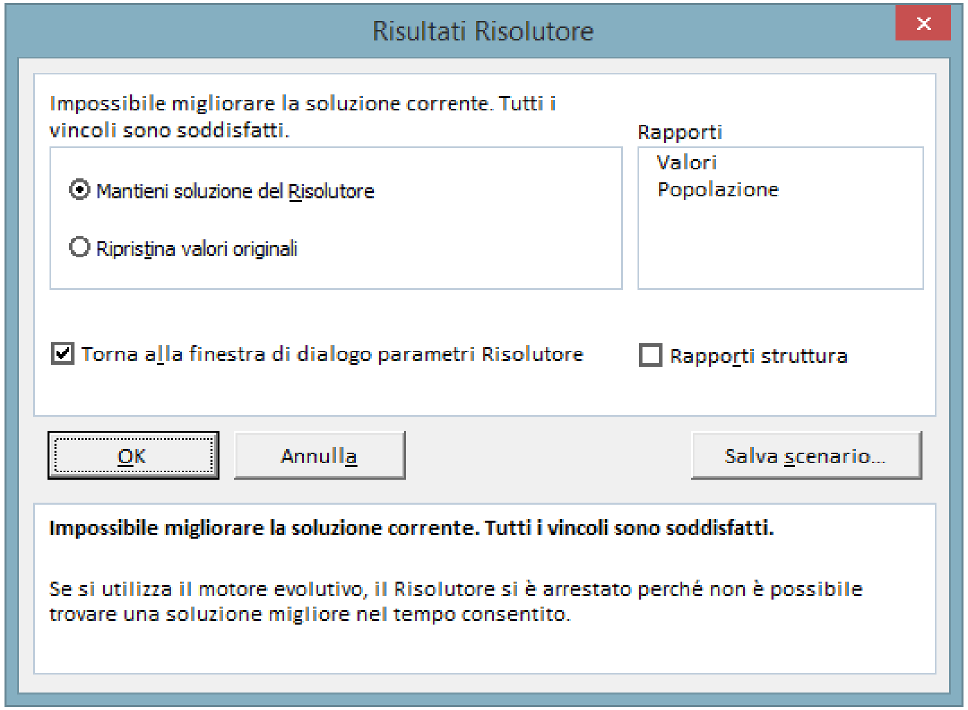
Se infine seleziono come algoritmo di soluzione quello "**Evolutivo**" ottengo, dopo diverso tempo, la seguente soluzione:

G_m = Giornate di attività

Miniera 1	7	G_1
Miniera 2	5	G_2
Miniera 3	0	G_3

Obiettivo: minimo Costo della produzione (CE+CF) **279,00**

La soluzione trovata è questa volta ottimale.



Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

Esempio 3

La Premium Computer S.p.A. produce due modelli di computer: il **modello Base**, che genera un utile di 300€ per unità ed il **modello Smart**, che fornisce un utile unitario di 500€. I due modelli richiedono le seguenti componenti la cui disponibilità sono indicate nella colonna “**Magazzino**”.

Componente c	**1 - Modello Base**	**2 - Modello Smart**	**Disponibilità Magazzino G_c**
Chassis Base	1 Pz.	0	60
Chassis Smart	0	1 Pz.	50
Hard Disk Drive	1 Pz.	2 Pz.	120

Determinare la quantità dei due modelli di computer che devono essere prodotte per massimizzare gli utili.

Il Risolutore

A) DEFINIZIONE DEGLI ELEMENTI PRINCIPALI DEL PROBLEMA:

Identifichiamo:

- **Indici e costanti**
- **Variabili**
- **Funzione obiettivo**
- **Vincoli**

Gli **indici e le costanti** del problema sono:

c	Indica il tipo di componenti (1- Chassis Base, 2 – Chassis Smart, 3 – Hard Disk)
m	Indica il modello (1 – Base, 2 - Smart)
G_c	Giacenza componente **c** in magazzino
Q_m	Quantità di modello **m** prodotta
$R_{c,m}$	Quantità di componente **c** richiesta per il modello **m**

Il Risolutore

Le **variabili decisionali** sono quelle che rappresentano le decisioni che l'imprenditore può prendere per raggiungere il proprio obiettivo. In questo caso le variabili sono:

Q_m unità di modello **m** prodotte.

La **funzione obiettivo** rappresenta la funzione che descrive cosa l'imprenditore vuole ottenere. In questo caso la funzione obiettivo è rappresentata dalla massimizzazione degli utili che dipendono dalle quantità prodotte per ogni modello **m**.

$$\max(Q_1 \cdot 300 + Q_2 \cdot 500)$$

Q_m :unità prodotte per il modello **m.**

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

Le *variabili decisionali* sono soggette a **vincoli** che rappresentano delle limitazioni alle decisioni che il nostro imprenditore può prendere.

In questo esempio i vincoli sono:

- le quantità $\mathbf{Q_m}$ prodotte devono essere non negative

$$Q_m >= 0$$

- La quantità di componente **c** utilizzata per la produzione dei due modelli deve essere minore o uguale alla giacenza $\mathbf{G_c}$ in magazzino di quel componente.

$$\sum_{m=1}^{2} Q_m \cdot R_{c,m} \leq G_c$$

$\mathbf{R_{c,m}}$: quantità di componente **c** richiesta per produrre un modello **m**

$\mathbf{Q_m}$: quantità di modello **m** prodotti

$\mathbf{G_c}$: quantità di componente **c** in giacenza

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

PREPARAZIONE DEL FOGLIO EXCEL:

Dopo aver individuato le variabili decisionali, la funzione obiettivo e i vincoli, costruiamo il nostro foglio

Esempio Computer

Q_m = Numero modelli da produrre

Modello Base	50	Q_1
Modello Smart	50	Q_2

$R_{c,m}$ = Q.tà di componente c richiesta per modello m

$R_{c,m}$ (c \ m)	m=1 M. Base	m=2 M. Smart
c=1 Chassis Base	1	0
c=2 Chassis Smart	0	1
c=3 Hard Disk	1	2

G_c = Giacenza componenti

	G_c	
Chassis Base	60	G_1
Chassis Smart	50	G_2
Hard Disk	120	G_3

VINCOLI

Componenti usate $\Sigma Q_m R_{c,m} <= G_c$)

Chassis Base	50	≤	60
Chassis Smart	50	≤	50
Hard Disk	150	≤	120

Obiettivo: Massimo utile | € 40.000,00

Variabili Decisionali: evidenziate con lo sfondo giallo sono nel nostro esempio rappresentate dalle unità prodotte Q_m per ogni singolo modello

Vincoli: scritti in verde si riferiscono a limitazioni sui valori assunti dalle variabili decisionali Q_m o da formule che dipendono da queste variabili.

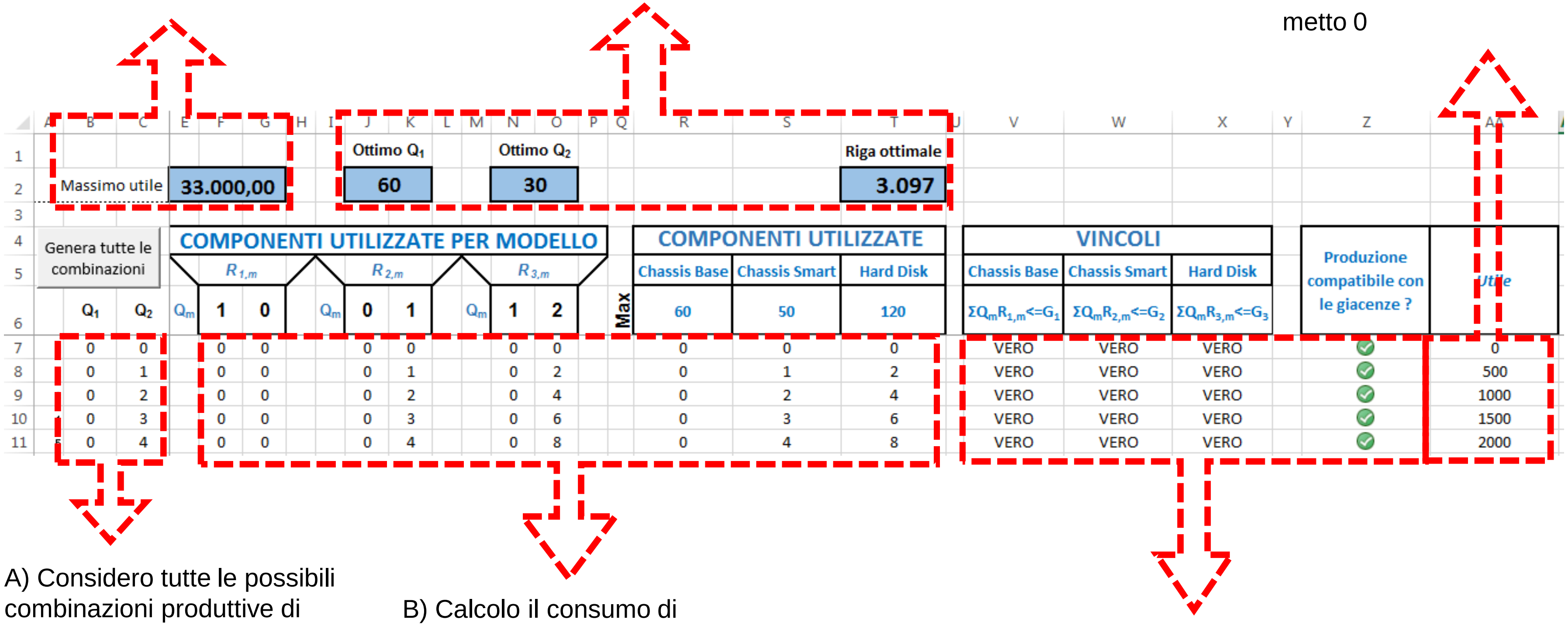
Nel nostro caso devo avere che:
- Q_m sia >=0
- la quantità di componenti utilizzate $R_{c,m} \cdot Q_m$ non devono superare le relative giacenze G_c

Il Risolutore

E) Calcolo l'utile (massimo!) ottenuto con la combinazione ottimale trovata

F) Cerco la riga contenente il massimo utile ed estraggo la combinazione Q_1 e Q_2 corrispondente

D) Espongo l'utile solo per le combinazioni ammissibili. Per le altre metto 0



	Ottimo Q_1	Ottimo Q_2	Riga ottimale
Massimo utile 33.000,00	60	30	3.097

Genera tutte le combinazioni

		COMPONENTI UTILIZZATE PER MODELLO							COMPONENTI UTILIZZATE			VINCOLI				
		$R_{1,m}$		$R_{2,m}$		$R_{3,m}$			Chassis Base	Chassis Smart	Hard Disk	Chassis Base	Chassis Smart	Hard Disk	Produzione compatibile con le giacenze ?	Utile
Q_1	Q_2	Q_m 1	0	Q_m 0	1	Q_m 1	2	Max	60	50	120	$\Sigma Q_m R_{1,m} <= G_1$	$\Sigma Q_m R_{2,m} <= G_2$	$\Sigma Q_m R_{3,m} <= G_3$		
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	VERO	VERO	VERO	✓	0
0	1	0	0	0	1	0	2		0	1	2	VERO	VERO	VERO	✓	500
0	2	0	0	0	2	0	4		0	2	4	VERO	VERO	VERO	✓	1000
0	3	0	0	0	3	0	6		0	3	6	VERO	VERO	VERO	✓	1500
0	4	0	0	0	4	0	8		0	4	8	VERO	VERO	VERO	✓	2000

A) Considero tutte le possibili combinazioni produttive di modelli base (da 0 a 60) e smart (da 0 a 50)

B) Calcolo il consumo di componenti corrispondente alla singola combinazione di numero di modelli prodotti (variabili decisionali)

C) Valuto le combinazioni che risultano ammissibili (che soddisfano l'impegno assunto)

Tutte le possibili combinazioni 51x61 possono essere ottenute mediante le seguenti formule. **N** è un numero progressivo da 0 a 3110 utilizzato per numerare la combinazione analizzata.

$$Q_2 = \text{RESTO}(N;51) \quad - \quad Q_1 = (N-Q_2)/51$$

Il Risolutore

Esempio 4

La nostra azienda deve affrontare una decisione che consiste nella scelta di aprire uno o più magazzini.

Supponiamo che siano stati pianificati **4 magazzini** **m** destinati a contenere i rifornimenti in cucine per i nostri **12 punti vendita** **v**.

Ad ogni magazzino **m** è associata una capacità massima in cucine N_m dove **m**: 1 .. 4.

Ad ogni punto vendita corrisponde un volume di consegne (*vendite!*) in cucine pari a C_v con **v**:1 .. 12. Il costo di trasporto per inviare una cucina dal magazzino **m** al punto vendita **v** è pari a $T_{m,v}$. Ogni magazzino richiede per la sua apertura un costo di avviamento pari a A_m. L'obiettivo della nostra azienda consiste nel determinare la soluzione che minimizza il costo totale partendo dall'ipotesi che il costo del trasporto $T_{m,v}$ sia proporzionale al numero di cucine trasportate. Per ipotesi si suppone che i punti vendita non siano in grado di gestire eccedenze nelle consegne rispetto alle richieste C_v della clientela. In altre parole le consegne coincidono con le richieste.

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

DEFINIZIONE DEGLI ELEMENTI PRINCIPALI DEL PROBLEMA:

Identifichiamo gli **Indici e costanti, Variabili, Funzione obiettivo** e **Vincoli**

Gli **indici e le costanti** del problema sono:

v	Indica il punto vendita (1 … 12)
m	Indica il magazzino (1 … 4)
$T_{m,v}$	Costo del trasporto di una cucina dal magazzino **m** al punto vendita **v**
N_m	Numero massimo di cucine che il magazzino **m** può contenere
C_v	Numero di cucine consegnate ai clienti del punto vendita **v**. Coincide con le vendite del punto vendita **v**.

Le **variabili decisionali** sono :

$S_{m,v}$	Quantità spedita dal magazzino **m** al punto vendita **v**
Y_m	Vale 1 se il magazzino **m** viene attivato (dipende da $S_{m,v}$ per cui il suo valore è assegnato automaticamente. Basta un punto vendita **v** dove la relazione $S_{m,v}>0$ è vera per ottenere $Y_m=1$)

Il Risolutore

La **funzione obiettivo** è rappresentata dalla minimizzazione dei costi del sistema di distribuzione che dipendono dal trasporto e dal costo di attivazione di ogni singolo magazzino.

$T_{m,v}$:Costo del trasporto dal magazzino **m** al punto vendita **v** di una singola cucina.

A_m :Costo di avviamento del magazzino **m**.

$$min \sum_{m=1}^{4} \sum_{v=1}^{12} S_{m,v} \cdot T_{m,v} + \sum_{m=1}^{4} A_m \cdot Y_m$$

Y_v :Decisione se attivare o meno il magazzino **m**.

$S_{m,v}$:Numero cucine spedite dal magazzino **m** al punto vendita **v**.

Il Risolutore

Q_m: quantità di modello **m** prodotti

$R_{c,m}$: quantità di componente **c** richiesta per produrre un modello **m**

Le variabili decisionali sono soggette a **vincoli** che limitano lo spazio dei valori utilizzabili. In questo esempio i vincoli sono:

- Il numero di cucine **$S_{m,v}$** che viene spedito da ogni singolo magazzino **m** deve essere inferiore o uguale alla capacità **N_m** dello stesso

$$\sum_{v=1}^{12} S_{m,v} \leq N_m$$

$S_{m,v}$:Numero cucine spedite dal magazzino **m** al punto vendita **v**.

- Il numero di cucine spedito è un valore non negativo. Inoltre la decisione **Y_m** di attivare un magazzino **m** è un intero che assume come unici valori 0 o 1

$$S_{m,v} \geq 0 \qquad Y_m \in \{0,1\}$$

- Il numero di cucine che arriva ad un punto vendita **v** deve essere pari al numero di cucine vendute **C_v** dal punto vendita

$$\sum_{m=1}^{4} S_{m,v} = C_v$$

Il Risolutore

Dopo aver individuato le variabili decisionali, la funzione obiettivo e i vincoli, costruiamo il nostro foglio

Esempio Distribuzione Cucine

$S_{m,v}$ = Nr. Cucine spedite dal magazzino m al punto vendita v

$S_{m,v}$ (v \ m)	Mag. 1	Mag. 2	Mag. 3	Mag. 4
Punto V_1	0	0	0	0
Punto V_2	0	0	0	0
Punto V_3	0	0	0	0
Punto V_4	0	0	0	0
Punto V_5	0	0	0	0
Punto V_6	0	0	0	0
Punto V_7	0	0	0	0
Punto V_8	0	0	0	0
Punto V_9	0	0	0	0
Punto V_{10}	0	0	0	0
Punto V_{11}	0	0	0	0
Punto V_{12}	0	0	0	0

C_v = Nr. Cucine vendute nel punto vendita v

	C_v	
Punto V_1	18	D_1
Punto V_2	18	D_2
Punto V_3	12	D_3
Punto V_4	6	D_4
Punto V_5	14	D_5
Punto V_6	8	D_6
Punto V_7	17	D_7
Punto V_8	19	D_8
Punto V_9	9	D_9
Punto V_{10}	12	D_{10}
Punto V_{11}	9	D_{11}
Punto V_{12}	14	D_{12}

N_m = Capacità in nr. di cucine del magazzino m

	N_m	
Magazzino 1	60	N_1
Magazzino 2	50	N_2
Magazzino 3	120	N_3
Magazzino 4	120	N_4

A_m = Costo avviamento magazzino

	A_m	
Magazzino 1	€ 5.117,28	A_1
Magazzino 2	€ 5.317,17	A_2
Magazzino 3	€ 5.113,44	A_3
Magazzino 4	€ 4.585,05	A_4

$T_{m,v}$ = Costo trasporto singola cucina dal magazzino m al punto vendita v.

$T_{m,v}$ (v \ m)	Mag. 1	Mag. 2	Mag. 3	Mag. 4
Punto V_1	€ 475,83	€ 332,62	€ 456,41	€ 657,39
Punto V_2	€ 694,20	€ 238,90	€ 514,17	€ 571,42
Punto V_3	€ 686,17	€ 622,01	€ 663,36	€ 324,56
Punto V_4	€ 503,21	€ 233,06	€ 253,01	€ 774,89
Punto V_5	€ 524,48	€ 225,07	€ 443,08	€ 449,28
Punto V_6	€ 383,17	€ 775,00	€ 364,08	€ 583,01
Punto V_7	€ 557,22	€ 789,98	€ 420,83	€ 585,57
Punto V_8	€ 210,87	€ 236,34	€ 405,99	€ 764,54
Punto V_9	€ 519,36	€ 409,23	€ 360,76	€ 499,71
Punto V_{10}	€ 632,48	€ 653,86	€ 568,51	€ 278,69
Punto V_{11}	€ 299,38	€ 705,24	€ 792,69	€ 385,50
Punto V_{12}	€ 445,24	€ 502,00	€ 333,66	€ 777,02

VINCOLI

Cucine consegnate ad ogni punto vendita v ($\Sigma S_{m,v}=C_v$)

			C_v
Punto V_1	0	=	18
Punto V_2	0	=	18
Punto V_3	0	=	12
Punto V_4	0	=	6
Punto V_5	0	=	14
Punto V_6	0	=	8
Punto V_7	0	=	17
Punto V_8	0	=	19
Punto V_9	0	=	9
Punto V_{10}	0	=	12
Punto V_{11}	0	=	9
Punto V_{12}	0	=	14

Componenti spedite da ogni magazzino m ($\Sigma S_{m,v}$<=N_m)

			N_m
Magazzino 1	0	≤	60
Magazzino 2	0	≤	50
Magazzino 3	0	≤	120
Magazzino 4	0	≤	120

Attivazione magazzino

	Y_m		
Magazzino 1	0	є	{0,1}
Magazzino 2	0	є	{0,1}
Magazzino 3	0	є	{0,1}
Magazzino 4	0	є	{0,1}

Obiettivo: Minimizzare i costi di distribuzione | € -

Variabili Decisionali: evidenziate con lo sfondo giallo sono nel nostro esempio rappresentate dalle unità spedite $S_{m,v}$ dal magazzino **m** al punto vendita **v**. Y_m non è stata considerata di input poiché dipende dai valori di $S_{m,v}$.

Vincoli: scritti in verde si riferiscono a limitazioni sui valori assunti dalle variabili decisionali $S_{m,v}$ o da formule che dipendono da queste variabili.

Nel nostro caso devo avere che:

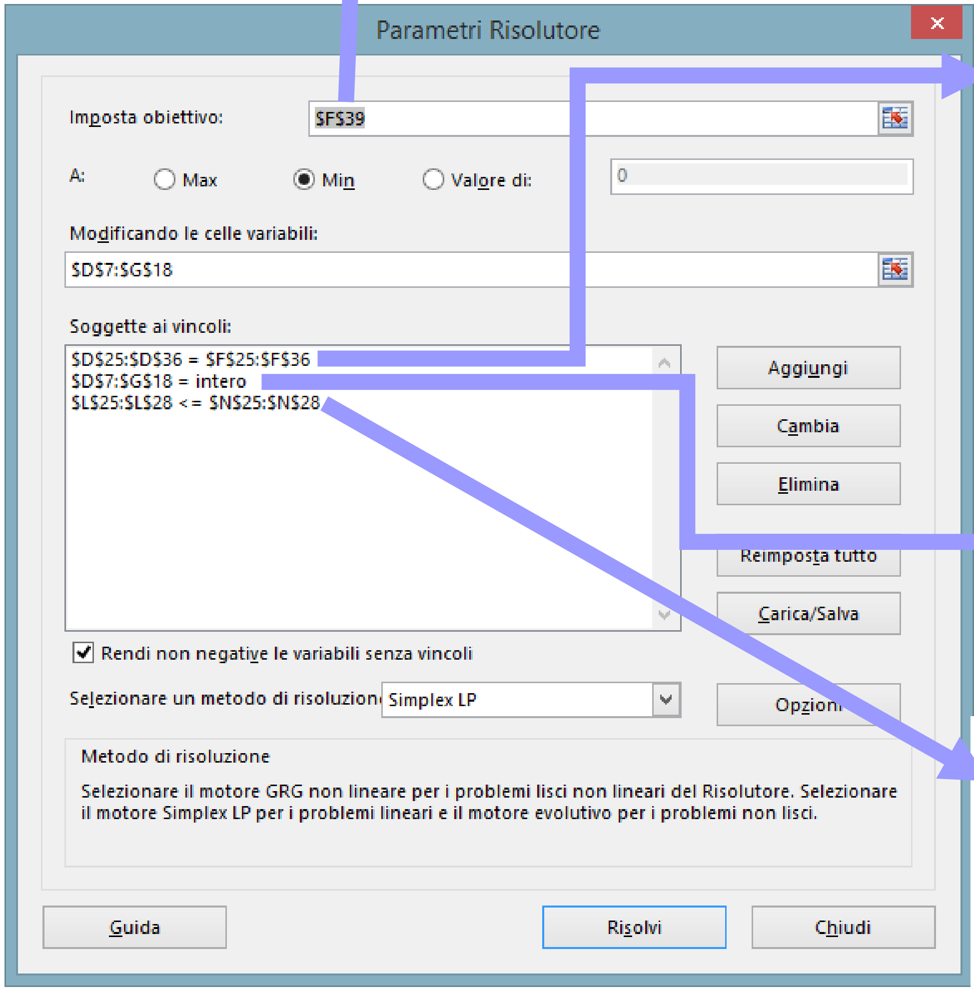
- $\Sigma S_{m,v} = C_v$
- $\Sigma S_{m,v} <= N_m$
- $Y_m \in \{0,1\}$

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

Considerare un approccio di tipo enumerativo risulta piuttosto arduo. Utilizziamo quindi il Solver ed impostiamo questi vincoli:

Obiettivo: Minimizzare i costi di distribuzione	€ 102.492,36



Cucine consegnate ad ogni punto vendita v ($\Sigma S_{m,v}=C_v$)

			C_v
Punto V_1	0	=	18
Punto V_2	0	=	18
Punto V_3	0	=	12
Punto V_4	0	=	6
Punto V_5	0	=	14
Punto V_6	0	=	8
Punto V_7	0	=	17
Punto V_8	0	=	19
Punto V_9	0	=	9
Punto V_{10}	0	=	12
Punto V_{11}	0	=	9
Punto V_{12}	0	=	14

$S_{m,v}$ = Nr. Cucine spedite dal magazzino m al punto vendita v

$S_{m,v}$ v \ m	Mag. 1	Mag. 2	Mag. 3	Mag. 4
Punto V_1	0	0	0	0
Punto V_2	0	0	0	0
Punto V_3	0	0	0	0
Punto V_4	0	0	0	0
Punto V_5	0	0	0	0
Punto V_6	0	0	0	0
Punto V_7	0	0	0	0
Punto V_8	0	0	0	0
Punto V_9	0	0	0	0
Punto V_{10}	0	0	0	0
Punto V_{11}	0	0	0	0
Punto V_{12}	0	0	0	0

Attivazione magazzino

	Y_m		
Magazzino 1	1	∈	{0,1}
Magazzino 2	1	∈	{0,1}
Magazzino 3	1	∈	{0,1}
Magazzino 4	1	∈	{0,1}

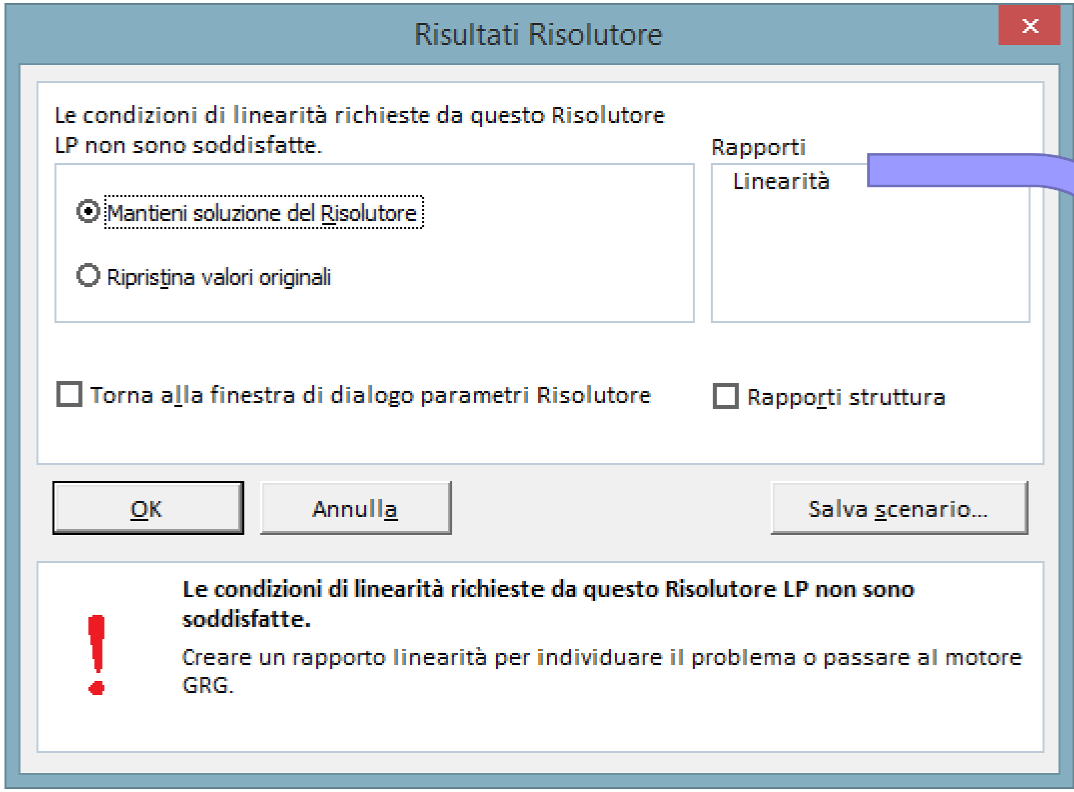
Componenti spedite da ogni magazzino m ($\Sigma S_{m,v} \le N_m$)

			N_m
Magazzino 1	0	≤	60
Magazzino 2	0	≤	50
Magazzino 3	0	≤	120
Magazzino 4	0	≤	120

Qui non è necessario impostare alcun vincolo: la formula utilizzata blinda i possibili gradi di libertà a 0 o 1.

Il Risolutore

Se applico il *__metodo del simplesso__* ottengo una segnalazione di errore poiché le condizioni di linearità sono violate (*vedi il rapporto di linearità che segnala la funzione obiettivo come non lineare. Effettivamente ho utilizzato una* ***__formula matriciale__****!*)



	A	B	C	D	E	F
7		**Cella**	**Nome**	**Valore originale**	**Valore finale**	**Funzione lineare**
8		$F$39	Obiettivo: Minimizzare i costi di distribuzione Cv	€ -	€ -	**No**
9						
10						
11	Celle variabili					
12		**Cella**	**Nome**	**Valore originale**	**Valore finale**	**Avviene in modo lineare**
13		$D$7	Punto V1 Mag. 1	0	0	**No**
14		$E$7	Punto V1 Mag. 2	0	0	**No**

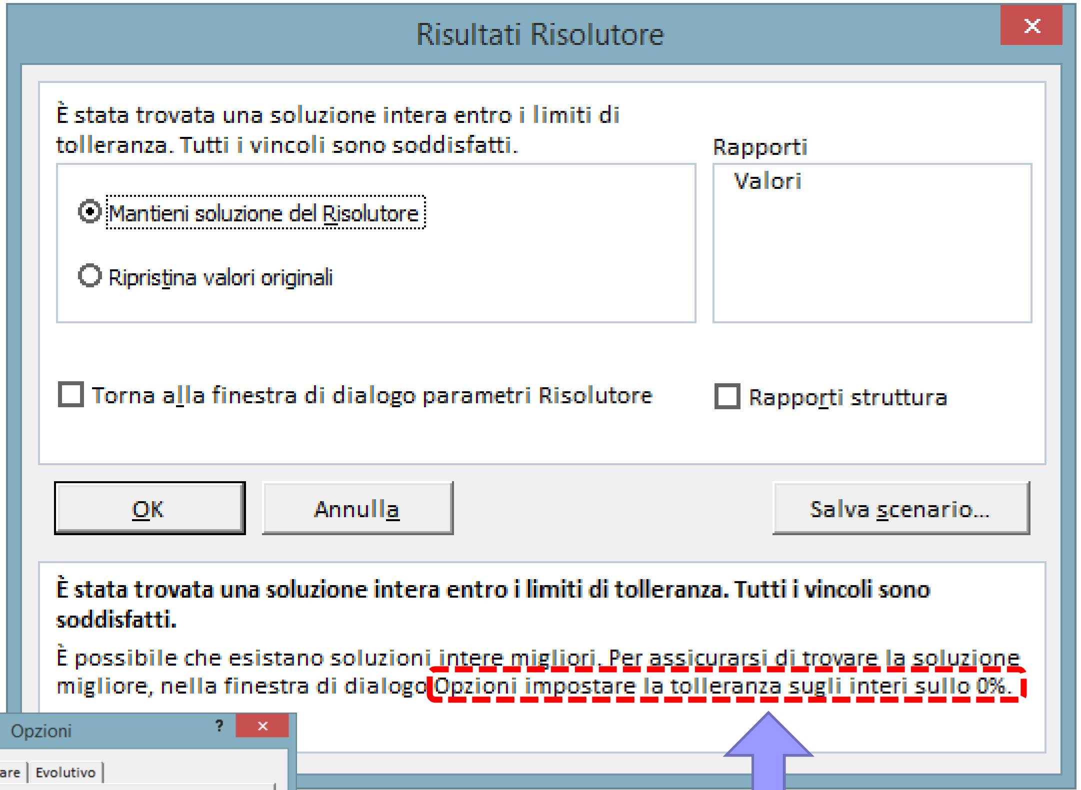
Il Risolutore

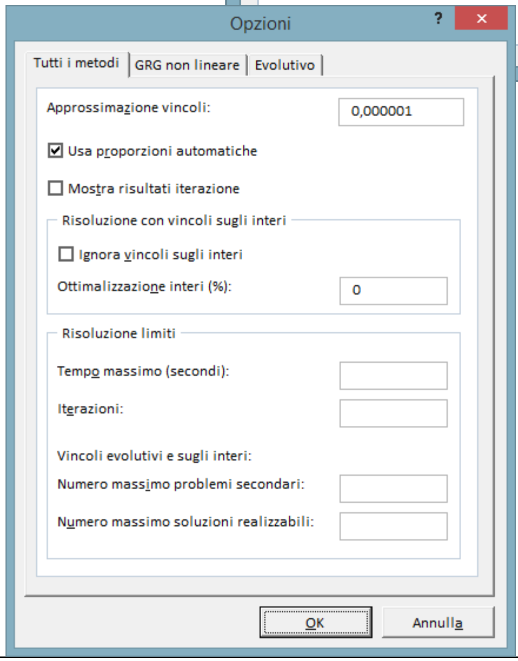
Se applico il metodo
del **gradiente** ottengo:

Obiettivo: Minimizzare i costi di distribuzione | € 67.014,13

$S_{m,v}$ = Nr. Cucine spedite dal magazzino **m** al punto vendita **v**

$S_{m,v}$ m / v	Mag. 1	Mag. 2	Mag. 3	Mag. 4
Punto V_1	0	18	0	0
Punto V_2	0	18	0	0
Punto V_3	0	0	0	12
Punto V_4	0	0	6	0
Punto V_5	0	14	0	0
Punto V_6	0	0	8	0
Punto V_7	0	0	17	0
Punto V_8	19	0	0	0
Punto V_9	0	0	9	0
Punto V_{10}	0	0	0	12
Punto V_{11}	9	0	0	0
Punto V_{12}	0	0	14	0



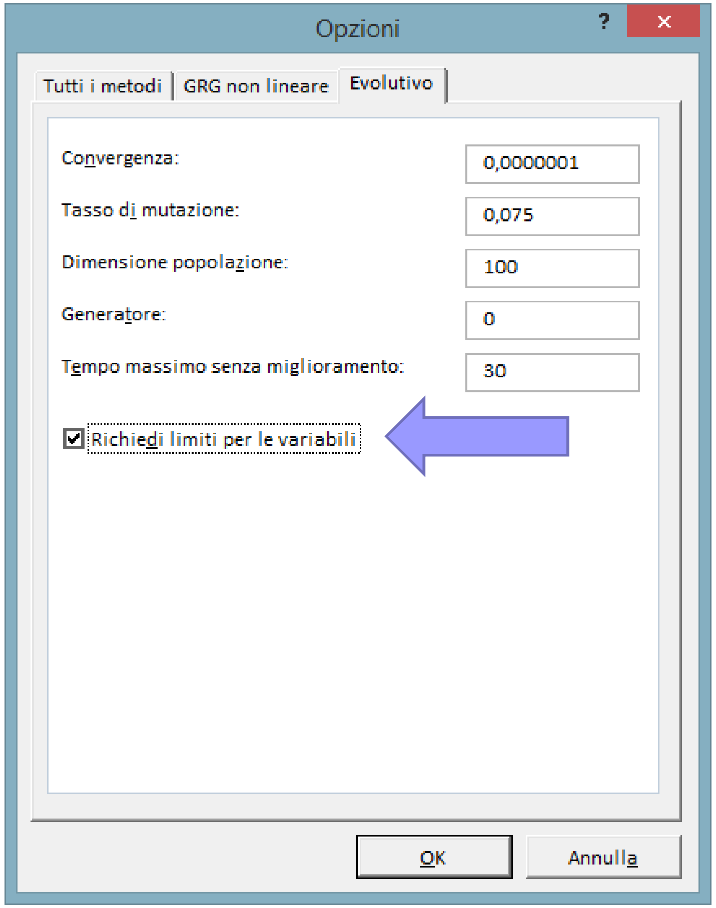


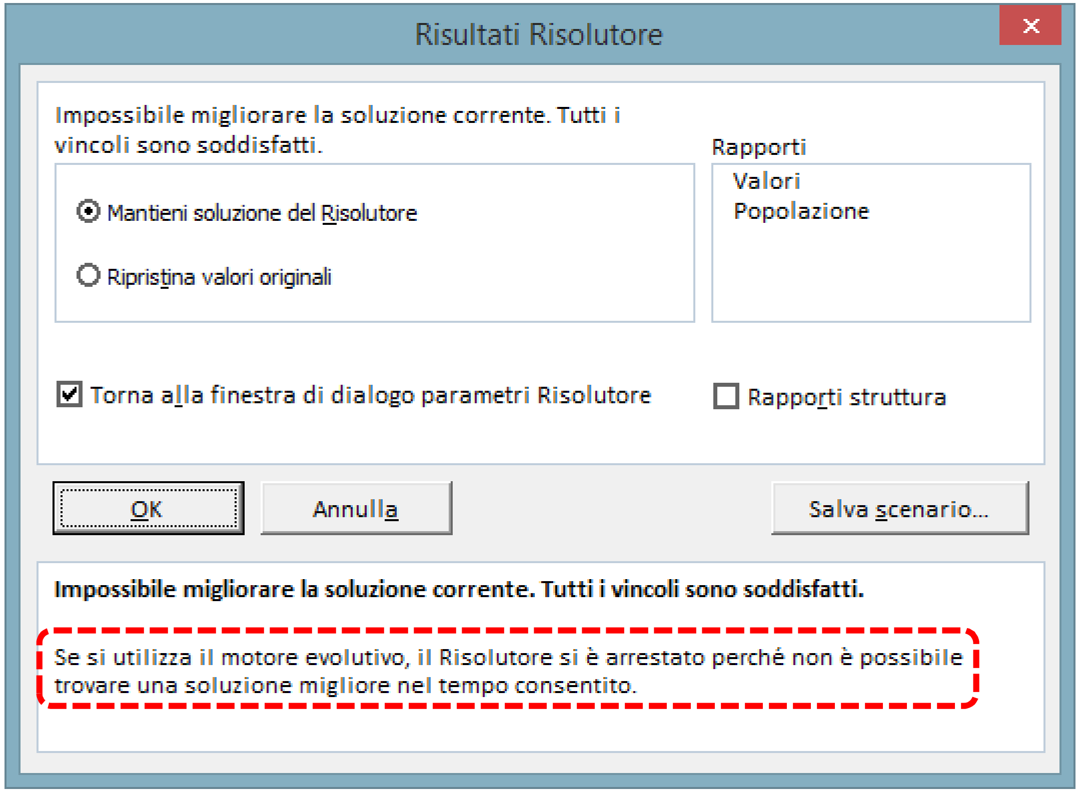
Possibile ulteriore ottimizzazione

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Il Risolutore

Se applico il **metodo evolutivo** devo togliere nelle opzioni la spunta su "*Richiedi limiti per le variabili*". Ottengo lo stesso risultato ottenuto con il metodo del gradiente (precedente slide).





Potrei provare a cercare un miglior risultato aumentando il tempo consentito.

Il Risolutore

Concludendo il **Risolutore** ha bisogno di 3 componenti primarie per funzionare. Occorre quindi identificarle all'interno del nostro problema di ottimizzazione.

- **Cella obiettivo ➔** E' la cella che rappresenta l'obiettivo del problema. Ad esempio se dobbiamo <u>pianificare la produzione industriale</u> settimanale (*la distribuzione del carico di lavoro su ogni nostro macchinario*) della nostra azienda l'obiettivo sarà quello di evitare al massimo i periodi di inattività dei nostri sistemi di produzione. La cella che riporta le <u>ore di inoperatività</u> complessive sarà la *cella obiettivo* e faremo il possibile per ottenere un valore minimo.

- **Celle variabili ➔** sono le celle che possono essere modificate per arrivare al risultato desiderato. Nel nostro esempio potrebbero essere le fasce orarie assegnate ad una determinata macchina (ad esempio: dalle ore alle ore la macchina viene impegnata a produrre gli articoli relativi alla commessa α).

- **Vincoli**: sono limitazioni a ciò che può fare il Risolutore per risolvere il problema. Ad esempio, se la macchina π è rotta il Risolutore non potrà assegnarli alcun carico di lavoro.